

К ТЕОРИИ ЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ НЕАНТАГОНИСТИЧЕСКИХ ИГР

Аннотация. В предлагаемой работе изучены задачи из теории динамических игр нескольких лиц с ненулевой суммой, когда ценой игры является система функционалов типа расстояния. Особенность работы заключается в том, что для описания эволюции объектов выделены три случая линейных систем типа Вольтерра: интегродифференциальная система уравнений с управляющими воздействиями вне интеграла, интегродифференциальная система уравнений с управляющими воздействиями под знаком интервала и система интегральных уравнений. Решение задачи заключается в построении равновесного, по Нэшу, набора оптимальных стратегий для указанных типов динамических систем и выбранного функционала. Задача решается построением некоторой модификации известной экстремальной конструкции академика Н. Н. Красовского, которая заключается в новом определении позиции игры, для чего используется полная память по управляющим воздействиям, что существенно усложняет все исследование. Доказаны соответствующие теоремы.

Ключевые слова: интегродифференциальное уравнение Вольтерра, интегральное уравнение Вольтерра, управляющее воздействие, измеримая функция, траектория, позиция, оптимальная стратегия.

V. L. Pasikov

TOWARDS THE THEORY OF LINEAR DYNAMIC NONANTAGONISTIC GAMES

Abstract. The article studies the problems of the theory of dynamic games of several persons with non-zero sum, when the value of the game is the system of functionals of distance type. The peculiarity of the work lies in the fact that to describe the evolution of objects there may be used three cases of linear systems of Volterra type: integro-differential system of equations with managing impacts outside of the integral, integro-differential system of equations with control actions under the sign of the interval and the system of integral equations. Solution of the problem lies in the construction of equilibrium, the Nash equilibrium, the set of optimal strategies for specified types of dynamical systems and the selected features. The problem is solved by constructing some modification of the well known extreme construction of the academician N. N. Krasovskiy, which is based on a new definition of the position of the game that uses a full memory of the control inputs, which significantly complicates the entire study. The corresponding theorems have been proven.

Key words: Volterra integral differential equation, Volterra's integral equation, control action, measurable function, trajectory, game position, optimal strategy.

Рассмотрим неантагонистические динамические игры, в которых динамика описывается линейными интегродифференциальными и интегральными системами Вольтерра. Решение задач проводится на основе методов, разработанных в [1–3], которые модифицированы к рассмотренным ниже случаям.

Пусть, как и в [3], задана система функционалов

$$Y_i(u_1, \dots, u_m) = \|c_i - x(\theta)\|, \quad i = \overline{1, m}, \quad (1)$$

предполагается, что игрок P_k стремится минимизировать k -й функционал из (1) на траекториях некоторой системы, описывающей динамику игры; $\|\bullet\|$ – символ евклидовой нормы в R^n .

Динамика управляемой системы определяется векторным интегродифференциальным уравнением Вольтерра

$$\dot{x}(t) = f(t) + A(t)x(t) + \int_0^t K(t,s)x(s)ds + \sum_{i=1}^m u_i(t), x(0) = x_0, \quad (2)$$

где x – n -мерный фазовый вектор; $f(t)$ – n -мерная интегрируемая по Лебегу на $[0, \theta]$ вектор-функция; $\theta > 0$ – фиксированный момент окончания игры; $A(t)$ – непрерывная на $[0, \theta]$ матрица $n \times n$; $u_i(t)$, $i = \overline{1, m}$, – управляющие воздействия, стесненные ограничениями, $u_i \in U_i$; U_i – выпуклые компакты в R^n , а их реализации $u_i[t]$, $t \in [t_0, \theta)$, – измеримые по Лебегу функции. Такие управления называют допустимыми.

Стратегией U_k игрока P_k называется правило выбора управления u_k в каждый момент $t \in [t_0, \theta)$, $t_0 \in [0, \theta)$ – начало процесса управления.

Задача 1. Для системы функционалов

$$Y_i(u_1, \dots, u_m) = \varphi_i(x[\theta]), i = \overline{1, m-1}; \quad (3)$$

$$Y_m(u_1, \dots, u_m) = \sum_{j=1}^r \alpha_j \|d_j - x[\theta]\| = \varphi_m(x[\theta]), \alpha_j > 0, \quad (4)$$

найти такие стратегии $U_1^e, \dots, U_m^e$, для которых выполняются соотношения $\varphi_i(x^e[\theta]) \leq \varphi_i(x^k[\theta])$, $i = \overline{1, m}$; $x^e[\theta]$ – точка реализовавшейся траектории $x[t]$, $t \in [0, \theta]$, системы (2), которая отвечает стратегиям $U_1^e, \dots, U_m^e$; $x^k[\theta]$ – точка реализовавшейся траектории $x[t]$, $t \in [0, \theta]$, системы (2), которая отвечает реализациям управлений $u_1^e[t], \dots, u_{k-1}^e[t], u_k[t], u_{k+1}^e[t], \dots, u_m^e[t]$, где $u_i^e[t]$, $i = \overline{1, m}$, $i \neq k$, формируется на основе U_i^e ; $u_k[t]$ – реализация произвольного, измеримого по Лебегу управления, стесненного условием $u_k \in U_k$. Если задача 1 разрешима, то набор стратегий $U^e = \{U_1^e, \dots, U_m^e\}$ называется равновесным по Нэшу [3] для игры, описываемой задачей 1. Такие стратегии называются оптимальными для игроков $P_1, \dots, P_m$. Система функционалов (3), (4) интерпретируется следующим образом: игроки $P_1, \dots, P_{m-1}$ стремятся «поразить» в момент t заданные точки $c_1, \dots, c_{m-1}$, а игрок P_m – систему точек $d_1, \dots, d_r$ [3].

Если $\sum_{j=1}^r \alpha_j = 1$, то $\sum_{j=1}^r \alpha_j \|d_j - x(\theta)\|$ – математическое ожидание дискретной случайной величины, возможными значениями которой являются евклидовы расстояния от $x(\theta)$ до каждой из точек $d_1, \dots, d_r$ [4]. Считаем, что к моменту

$t_0 \in [0, \theta)$ все игроки уже реализовали некоторые допустимые управления $u_i[t]$ согласно тем или иным соображениям, а для $t \geq t_0$ управления должны реализовываться согласно выбранным стратегиям. Предположив, что после некоторого момента $t \geq t_0$ управления $u[t] \equiv 0$, получаем согласно [5] состояние системы (2) в момент t :

$$x(\theta, t) = x(\theta, t_0) + \sum_{i=1}^m \int_{t_0}^t \tilde{x}(\theta, s) u_i(s) ds, \quad (5)$$

где

$$x(\theta, t_0) = X(\theta, 0)x_0 + \int_0^\theta \tilde{x}(\theta, s)\varphi(s)ds + \sum_{i=1}^m \int_0^{t_0} \tilde{x}(\theta, s)u_i[s]ds,$$

$$\varphi(s) = \hat{O}(s, 0)x_0 + f(s), \hat{O}(t, s) = \int_s^t K(t, \tau)X(\tau, s)d\tau,$$

$X(t, s)$ – матрица Коши системы $\dot{x} = A(t)x(t)$,

$$\tilde{x}(t, s) = X(t, s) + \int_s^t X(t, \tau)R(\tau, s)d\tau, \quad (6)$$

$R(t, s)$ – резольвента матрицы $\Phi(t, s)$.

Для построения оптимальной стратегии игрока P_k рассматриваем выражение, построенное по (5), (6):

$$\varepsilon_k(t_0, x(\theta, t_0), c_k) = \max_{\|l'_k\|=1} \left[l'_k(c_k - x(\theta, t_0)) - \int_{t_0}^\theta \max_{u_k \in U_k} \{l'_k \tilde{x}(\theta, s)\} u_k(s) ds - \right. \\ \left. - \sum_{\substack{i=1, t_0 \\ i \neq k}}^m \int_{t_0}^\theta \min_{u_i \in U_i} \{l'_k \tilde{x}(\theta, s)\} u_i(s) ds \right], \quad (7)$$

которое является евклидовым расстоянием от начальной позиции $x(\theta, t_0)$ до точки c_k , $k = \overline{1, m}$, при соответствующих управляющих воздействиях игроков $P_1, \dots, P_m$. В соотношении (7) максимум достигается на единственном векторе $l_k^0 = l_k(t, x(\theta, t))$, непрерывно зависящем от позиции $\{t, x(\theta, t)\}$, в случае, когда $\varepsilon_k(t, x(\theta, t), c_k) > 0$, т.е. рассматривается регулярный случай; считаем что $\forall t \in [t_0, \theta) \Rightarrow \varepsilon_k(t, x(\theta, t), c_k) > 0$ [1]; здесь и далее штрих означает транспонирование. После решения задачи (7) в момент $t \in [t_0, \theta)$ определяем оптимальную стратегию игрока P_k , $k = \overline{1, m}$, соотношением

$$\{l_k^{0'} \tilde{x}(\theta, t)\} u_k^e = \max_{u_k \in U_k} \{l_k^{0'} \tilde{x}(\theta, t)\} u_k. \quad (8)$$

Обозначим $x_k^e(t) = \{l_k^{0'} \tilde{x}(\theta, t)\}$. Как это следует из (6), $x_k^e(t)$ – решение интегрального уравнения второго рода

$$x_k^e(t) = \{l_k^{0'} X(\theta, t)\} + \int_t^\theta \hat{O}'(\tau, t) x_k^e(\tau) d\tau,$$

в котором $\{l_k^{0'} X(\theta, t)\}$ – решение системы $\frac{dx_k}{dt} = -A'(t)x_k$ с краевым условием

$x_k(\theta) = l_k^0$, сопряженной к системе $\frac{dx_k}{dt} = A(t)x_k$, $t \in [t_0, \theta]$, $k = \overline{1, m}$ [1].

Окончательно условие (8) переписываем в виде

$$x_k^e(t) u_k^e = \max_{u_k \in U_k} x_k^e(t) u_k. \quad (9)$$

В работе [5] было доказано, что введенные оптимальные стратегии уравнивают систему функционалов (1) в смысле Нэша. Будем теперь исследовать решение задачи 1. Для игроков $P_1, \dots, P_{m-1}$ оптимальные стратегии определяются равенством (9). Для построения оптимальной стратегии игрока P_m рассматриваем выражение

$$\begin{aligned} \varepsilon_m^j(t_0, x(\theta, t_0), d_j) = \max_{\|l_j\|=1} & \left[l_j'(d_j - x(\theta, t_0)) - \int_{t_0}^\theta \max_{u_m \in U_m} \{l_j' \tilde{x}(\theta, s)\} u_m(s) ds - \right. \\ & \left. - \sum_{i=1}^{m-1} \int_{t_0}^\theta \min_{u_i \in U_i} \{l_j' \tilde{x}(\theta, s)\} u_i(s) ds \right], \end{aligned} \quad (10)$$

значение которого является евклидовым расстоянием от точки $x(\theta, t_0)$ до точки d_j , $j = \overline{1, r}$, при указанных управляющих воздействиях всех игроков. Предполагается, что решение в (10) достигается на единственном векторе $l_j^0 = l_j^0(t_0, x(\theta, t_0))$ и $\varepsilon_m^j(t_0, x(\theta, t_0), d_j) > 0$, вектор l_j^0 непрерывно зависит от позиции [1].

После решения задачи (10) составляем вектор $l_m^0 = \sum_{j=1}^r \alpha_j l_j^0$ и определяем оптимальную стратегию U_m^e игрока P_m из условия

$$\{l_m^{0'} \tilde{x}(\theta, t)\} u_m^e(t) = \max_{u_m \in U_m} x_m^e(t) u_m, t \in [t_0, \theta]$$

или по аналогии с (9)

$$x_m^e(t)u_k^e(t) = \max_{u_m \in U_m} x_m^e(t)u_m, t \in [t_0, \theta), x_m^e(t) = \{l_m^{0'} \tilde{x}(\theta, t)\}. \quad (11)$$

Записываем функции

$$\begin{aligned} \varepsilon_m^j(t) = \varepsilon_m^j(t, x(\theta, t), d_j) = l_j^{0'}(d_j - x(\theta, t_0)) - \int_{t_0}^t \max_{u_m \in U_m} \{l_j^{0'} \tilde{x}(\theta, s)\} u_m(s) ds - \\ - \int_t^\theta \{l_j^{0'} \tilde{x}(\theta, s)\} u_m(s) ds - \sum_{j=1}^{m-1} \int_{t_0}^\theta \{l_j^{0'} \tilde{x}(\theta, s)\} u_i^e(s) ds. \end{aligned} \quad (12)$$

Из функций (12) записываем линейную комбинацию

$$\begin{aligned} \varepsilon_m(t) = \sum_{j=1}^r \alpha_j \varepsilon_m^j(t, x(\theta, t), d_j) = \sum_{j=1}^r \alpha_j l_j^{0'}(d_j - x(\theta, t_0)) - \\ - \int_{t_0}^t \max_{u_m \in U_m} \sum_{j=1}^r \{\alpha_j l_j^{0'} \tilde{x}(\theta, s)\} u_m(s) ds - \\ - \sum_{j=1}^r \int_t^\theta \{\alpha_j l_j^{0'} \tilde{x}(\theta, s)\} u_m(s) ds - \sum_{i=1}^{m-1} \int_{t_0}^\theta \sum_{j=1}^r \{\alpha_j l_j^{0'} \tilde{x}(\theta, s)\} u_i^e(s) ds, \end{aligned} \quad (13)$$

с использованием условия (11) формула (13) переписывается в следующем виде:

$$\begin{aligned} \varepsilon_m(t) = \sum_{j=1}^r \alpha_j l_j^{0'}(d_j - x(\theta, t_0)) - \int_{t_0}^t x_m^e(s) u_m^e(s) ds - \\ - \int_t^\theta x_m^e(s) u_m ds - \sum_{i=1}^{m-1} \int_{t_0}^\theta x_m^e(s) u_i^e(s) ds, \end{aligned} \quad (14)$$

здесь управления игроков $P_1, \dots, P_{m-1}$ являются оптимальными; $\varepsilon_m(\theta)$ – значение $\varepsilon_m(t)$ при $t = \theta$, когда все игроки применяли свои оптимальные управления; $\varepsilon_m(t_0)$ – значения $t = t_0$ при $\varepsilon_m(t)$, когда игроки $P_1, \dots, P_{m-1}$ применяют свои оптимальные стратегии, а игрок P_m применяет произвольное допустимое управление.

Вычисляем производную

$$\frac{d\varepsilon_m(t)}{dt} = -x_m^e(t)u_m^e(t) + x_m^e(t)u_m(t) = -\max_{u_m \in U_m} x_m^e(t)u_m + x_m^e(t) \leq 0,$$

таким образом, при замене в (13) (или в (14)) произвольного допустимого управления игрока P_m на оптимальное функция $\varepsilon_m(t)$ не возрастает, т.е. $\varepsilon_m(t) \leq \varepsilon_m(t_0)$. Следовательно доказана

Теорема 1. Оптимальные стратегии, определяемые равенствами (9), когда $k = \overline{1, m-1}$ и (11) при $k = m$, уравнивают в смысле Нэша систему функционалов (3), (4).

Пусть теперь динамика управляемого объекта описывается системой

$$\dot{x}(t) = f(t) + A(t)x(t) + \int_0^t K(t,s)x(s)ds + \sum_{i=1}^m \int_0^t B_i(t,s)u_i(s)ds, x(0) = x_0, \quad (15)$$

на которую дополнительно к (2) наложены следующие ограничения: $f(t)$ – функция с ограниченной вариацией на $[0, u]$; $B_i(t,s)$ – непрерывные при $0 \leq s \leq t \leq \theta$ матрицы $n \times r_i$ с интегрируемыми по Лебегу производными по первому аргументу; $u_i(t) \in U_i$, U_i – ограниченные выпуклые замкнутые множества в R^{r_i} .

Решение (15) с заданным начальным условием записывается следующим образом [6]:

$$x(t) = X(t,0)x_0 + \int_0^t X(t,s)\Psi(s,0)ds\varphi(0) + \\ + \int_0^t \left[\int_s^t X(t,\tau)\Psi(\tau,s)d\tau \right] d\varphi(s) + \sum_{i=1}^m \left[\int_s^t X(t,\tau)\chi_i(\tau,s)d\tau \right] u_i(s)ds, \quad (16)$$

здесь $\varphi(t) = f(t) + \Phi(t,0)x_0$ – функция с ограниченной вариацией и, следовательно, интеграл Стильеса, содержащийся в правой части (16), существует;

$\Psi(t,s) = E + \int_s^t R(t,\tau)d\tau$, E – единичная матрица; $R(t,s)$ – резольвента матрицы

$$\Phi(t,s), \chi_i(t,s) = \Psi(t,s)B_i(s,s) + \int_s^t \frac{\partial B_i(\tau,s)}{\partial \tau} d\tau, \text{ теперь обозначим}$$

$$x(\theta, t_0) = X(\theta,0)x_0 + \int_0^\theta X(\theta,s)\Psi(s,0)ds \varphi(0) + \\ + \int_0^\theta \left[\int_s^\theta X(\theta,\tau)\Psi(\tau,s)d\tau \right] d\varphi(s) + \sum_{i=1}^m \left[\int_s^\theta X(\theta,\tau)\chi_i(\tau,s)d\tau \right] u_i[s]ds,$$

тогда состояние системы (15) в момент t , $t_0 \leq t \leq \theta$, определяется формулой

$$x(\theta, t) = x(\theta, t_0) + \int_{t_0}^t \sum_{i=1}^m \left[\int_s^\theta X(\theta,\tau)\chi_i(\tau,s)d\tau \right] u_i(s)ds. \quad (17)$$

С помощью формулы состояния (17) динамической системы (15) решаем задачу (1). Для любой начальной позиции $(t_0, x(\theta, t_0))$, $t_0 \in [0, \theta)$, решаем вспомогательную задачу нахождения экстремального вектора l_k^0 , $k = \overline{1, m}$:

$$\varepsilon_k(t_0, x(\theta, t_0), C_k) = \max_{\|l\|=1} \left[l'(C_k - x(\theta, t_0)) - \int_{t_0}^{\theta} \max_{u_k \in U_k} \{l' \tilde{x}_k(\theta, s) u_k(s)\} ds - \right. \\ \left. - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^m \int_{t_0}^{\theta} \min_{u_i \in U_i} \{l' \tilde{x}_i(\theta, s) u_i(s)\} ds \right]; \quad (18)$$

$$\tilde{x}_i(\theta, s) = \int_s^{\theta} X(\theta, \tau) \chi_i(\tau, s) d\tau, \quad i = \overline{1, m}. \quad (19)$$

Пусть l_k^0 – решение задачи (18), тогда обозначим $x_k^e(t_0) = l_k^{0'} \cdot \tilde{x}_k(\theta, t_0)$, для игрока P_k , $k = \overline{1, m}$, оптимальное управление определяется условием

$$x_k^e(t) u_k^e(t) = \max_{u_k \in U_k} x_k^e(t) u_k, \quad t \in [t_0, \theta), \quad k = \overline{1, m}. \quad (20)$$

Оптимальные стратегии, определяемые равенствами (20), уравнивают в смысле Нэша систему функционалов (1) [7].

Решаем теперь задачу 1 для функционалов (3), (4) и управляемой системы (15). Записываем функцию по аналогии с (12):

$$\varepsilon_m^j(t_0, x(\theta, t_0), d_j) = \max_{\|l\|=1} \left[l'(d_j - x(\theta, t_0)) - \int_{t_0}^{\theta} \max_{u_m \in U_m} \{l' \tilde{x}_m(\theta, s) u_m(s)\} ds - \right. \\ \left. - \sum_{i=1}^{m-1} \int_{t_0}^{\theta} \min_{u_i \in U_i} \{l' \tilde{x}_i(\theta, s) u_i(s)\} ds \right], \quad (21)$$

$\tilde{x}_i(\theta, s)$ определяется формулой (19).

Решением задачи (21) является единственный вектор l_j^0 , теперь записываем функцию

$$\varepsilon_m(t) = \sum_{j=1}^r \varepsilon_m^j(t, x(\theta, t), d_j) = \sum_{j=1}^r \alpha_j l_j^{0'} (d_j - x(\theta, t_0)) - \\ - \int_{t_0}^t \max_{u_m \in U_m} \sum_{j=1}^r \{\alpha_j l_j^{0'} \tilde{x}_m(\theta, s) u_m(s)\} ds -$$

$$-\int_t^\theta \sum_{j=1}^r \{\alpha_j l_j^{0'} \tilde{x}_m(\theta, s)\} u_m(s) ds - \sum_{i=1}^{m-1} \int_{t_0}^\theta \min_{u_i \in U_i} \sum_{j=1}^r \{\alpha_j l_j^{0'} \tilde{x}_j(\theta, s)\} u_i^e(s) ds, \quad (22)$$

обозначим $l_m^0 = \sum_{j=1}^r \alpha_j l_j^0$, тогда оптимальная стратегия m -го игрока определяется условием

$$x_m^e(t) \cdot u_m^e(t) = \max_{u_m \in U_m} x_m^e(t) \cdot u_m, \quad (23)$$

где $x_m^e(t) = l_m^{0'} \cdot \tilde{x}_m(\theta, t)$; равенство (22) записываем следующим образом:

$$\begin{aligned} \varepsilon_m(t) = & \sum_{j=1}^r \alpha_j l_j^{0'} (d_j - x(\theta, t_0)) - \int_{t_0}^t x_m^e(s) u_m^e(s) ds - \\ & - \int_t^\theta x_m^e(s) u_m(s) ds - \sum_{i=1}^{m-1} \int_{t_0}^\theta x_m^e(s) u_i^e(s), \end{aligned} \quad (24)$$

в (22) $x_i^e(s) = l_m^{0'} \tilde{x}_i(\theta, s)$; $\varepsilon_m(\theta)$ – значение $\varepsilon_m(t)$ при $t = \theta$, когда все игроки на $[t_0, \theta)$ применяют свои оптимальные управления; $\varepsilon_m(t_0)$ – значение $\varepsilon_m(t)$, при $t = t_0$, когда игрок P_k применяет произвольное допустимое управление, а остальные игроки свои оптимальные управления.

Дифференцируя (24), получаем

$$\frac{d\varepsilon_m(t)}{dt} = -x_m^e(t) u_m^e(t) + x_m^e(t) u_m(t) = -\max_{u_k \in U_k} x_m^e(t) u_m(u_m) + x_m^e(t) u_m(t) \leq 0,$$

следовательно, при подстановке в (22) оптимального управления игрока P_m значения $\varepsilon_m(t)$ не возрастают, таким образом, $\varepsilon_m(\theta) \leq \varepsilon_m(t_0)$, что доказывает следующую теорему.

Теорема 2. Оптимальные стратегии, определяемые равенствами (20), когда $k = 1, m-1$ и (23) при $k = m$, уравнивают в смысле Нэша систему функционалов (3), (4).

Будем теперь рассматривать управляемую систему, динамика которой описывается системой линейных интегральных уравнений Вольтерра 2-го рода:

$$x(t) = f(t) + \int_0^t A(t, s) x(s) ds + \sum_{i=1}^m \int_0^t B_i(t, s) u_i(s) ds, \quad (25)$$

$x(t)$ – n -мерный фазовый вектор; $f(t)$ – n -мерная вектор-функция с ограниченной вариацией; $A(t, s)$, $B_i(t, s)$, $i = \overline{1, m}$, – матрицы $n \times n$, $n \times r_i$ соответственно, непрерывно дифференцируемые по первому аргументу и непрерывные по второму.

Тогда [8, 9] состояние системы (25) в момент $t \in [t_0, \theta)$ определяется формулой

$$x(\theta, t) = \hat{O}(\theta, 0)f(0) + \int_0^\theta \hat{O}(\theta, s)df(s) + \sum_{i=1}^m \int_0^{t_0} X_i(\theta, s)u_i[s]ds + \sum_{i=1}^m \int_{t_0}^t X_i(\theta, s)u_i(s)ds,$$

где $\hat{O}(t, s) = E + \int_s^t R(t, \tau)d\tau$, E – единичная матрица; $R(t, s)$ – резольвента матрицы $A(t, s)$, $X_i(\theta, s) = \hat{O}(\theta, s)B_i(s, s) + \int_s^\theta \hat{O}(\theta, \tau) \frac{\partial B_i(\tau, s)}{\partial \tau} d\tau$.

Как было показано в [7, 8], $l' \hat{O}(\theta, t) = *x(t)$ является решением интегрального уравнения $*x(t) = l' + \int_t^\theta *x(s) * A(s, t)ds$, сопряженного уравнению

$$x(t) = f(t) + \int_0^t A(t, s)x(s)ds,$$

где $*A(t, s) = A(t, t) + \int_s^t \frac{\partial A(t, \tau)}{\partial t} d\tau$, тогда

$$l' X_i(\theta, t) = *x(t)B_i(t, t) + \int_t^\theta *x(s) \frac{\partial B_i(s, t)}{\partial s} ds.$$

Обозначив
$$x(\theta, t_0) = \hat{O}(\theta, 0)f(0) + \int_0^\theta \hat{O}(\theta, s)df(s) + \sum_{i=1}^m \int_0^{t_0} X_i(\theta, s)u_i(s)ds,$$

получаем равенство:

$$x(\theta, t) = x(\theta, t_0) + \sum_{i=1}^m \int_{t_0}^t X_i(\theta, s)u_i(s)ds, \quad (26)$$

которое определяет позицию игры в момент t как пару $\{t, x(\theta, t)\}$; $\{t_0, x(\theta, t_0)\}$ – начальная позиция.

Записываем выражение

$$\varepsilon(t_0, x(\theta, t_0), c_k) = \max_{\|l\|=1} \left[l'(c_k - x(\theta, t_0)) - \int_{t_0}^\theta \max_{u_k \in U_k} \{l' X_k(\theta, s)\} u_k(s) ds - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^m \min_{u_k \in U_k} \{l' X_i(\theta, s)\} u_i(s) ds \right]. \quad (27)$$

Оптимальная стратегия игрока P_k согласно (27) определяется соотношением $\{l_k^{0'} X_k(\theta, t)\} u_k^e(t) = \max_{u_k \in U_k} \{l_k^{0'} X_k(\theta, t)\} u_k$, здесь $l_k^0 = l_k^0(t, x(\theta, t))$ – решение задачи (27) в каждый момент $t \in [t_0, \theta]$.

Обозначим $x_k^e(t) = \{l_k^{0'} X_k(\theta, t)\}$, тогда получаем соотношения, определяющие оптимальные стратегии игроков в следующей форме:

$$x_k^e(t) u_k^e = \max_{u_k \in U_k} x_k^e(t) u_k. \quad (28)$$

Оптимальные стратегии, построенные согласно соотношению (28), уравнивают в смысле Нэша систему функционалов (1), [9].

Решаем теперь задачу 1. Составляем функции

$$\begin{aligned} \varepsilon_m^j(t_0, x(\theta, t_0), d_j) = \max_{\|l\|=1} & \left[l'(d_j - x(\theta, t_0)) - \int_{t_0}^t \max_{u_m \in U_m} \{l' X_m(\theta, s)\} u_m(s) ds - \right. \\ & \left. - \int_t^\theta \{l' X_m(\theta, s)\} u_m(s) ds - \sum_{i=1}^{m-1} \int_{t_0}^\theta \min_{u_i \in U_i} \{l' X_i(\theta, s)\} u_i(s) ds \right]. \end{aligned} \quad (29)$$

После нахождения единственного решения l_j^0 задачи (29) записываем функцию

$$\begin{aligned} \varepsilon_m(t) = \sum_{j=1}^r \alpha_j \varepsilon_m^j(t, x(\theta, t), d_j) = \sum_{j=1}^r \alpha_j l_j^{0'} (d_j - x(\theta, t_0)) - \\ - \int_{t_0}^t \max_{u_m \in U_m} \sum_{j=1}^r \{\alpha_j l_j^{0'} X_m(\theta, s)\} u_m(s) ds - \\ - \int_t^\theta \sum_{j=1}^r \{\alpha_j l_j^{0'} X_m(\theta, s)\} u_m(s) ds - \sum_{i=1}^{m-1} \int_{t_0}^\theta \sum_{j=1}^r \{\alpha_j l_j^{0'} X_j(\theta, s)\} u_i^e(s) ds. \end{aligned} \quad (30)$$

Обозначим $\sum_{j=1}^r \alpha_j l_j^{0'} X_m(\theta, s) = x_m^e(s)$, $\sum_{j=1}^r \alpha_j l_j^{0'} X_i(\theta, s) = x_i^e(s)$, $i = \overline{1, m-1}$,

тогда

$$\begin{aligned} \varepsilon_m(t) = \sum_{j=1}^r \alpha_j l_j^{0'} (d_j - x(\theta, t_0)) - \int_{t_0}^t \max_{u_m \in U_m} x_m^e(s) u_m(s) ds - \\ - \int_t^\theta x_m^e(s) u_m(s) ds - \sum_{i=1}^{m-1} \int_{t_0}^\theta x_i^e(s) u_i^e(s) ds, \end{aligned} \quad (31)$$

где $\varepsilon_m(t_0)$ – значение $\varepsilon_m(t)$, когда игрок P_k в течение всей игры применяет произвольную допустимую стратегию, а остальные свои оптимальные стратегии; $\varepsilon_m(\theta)$ – значение $\varepsilon_m(t_0)$, когда все игроки применяют свои оптимальные стратегии. Дифференцируем (31):

$$\frac{d\varepsilon_m(t)}{dt} = - \max_{u_k \in U_k} x_m^e(t) \cdot u_m + x_m^e(t) \cdot u_m^e \leq 0.$$

Таким образом, если игрок P_k применяет стратегию

$$x_m^e(t) \cdot u_m^e(t) = \max_{u_k \in U_k} x_m^e(t) u_m, \quad (32)$$

функция не возрастает, тогда $\varepsilon_m(t) \leq \varepsilon(t)$. Следовательно, доказана теорема.

Теорема 3. Оптимальные стратегии, описываемые условиями (28), когда $k = \overline{1, m-1}$ и (32) при $k = m$, уравнивают систему функционалов (3), (4) в смысле Нэша.

Список литературы

1. Красовский, Н. Н. Игровые задачи о встрече движений / Н. Н. Красовский. – М.: Наука, 1970. – 420 с.
2. Субботин, А. И. Оптимизация гарантии в задачах управления / А. И. Субботин, А. Г. Ченцов. – М.: Наука, 1981. – 288 с.
3. Гороховик, В. В. О линейных дифференциальных играх нескольких лиц / В. В. Гороховик, Ф. М. Кириллова // Управляемые системы: сб. тр. – Вып. 10. – Новосибирск, 1971. – С. 3–9.
4. Гнеденко, Б. В. Курс теории вероятностей / Б. В. Гнеденко. – М.: Наука, 2005. – 448 с.
5. Пасиков, В. Л. Позиционное управление линейными интегродифференциальными системами Вольтерра для случая управляющих воздействий вне интеграла / В. Л. Пасиков // Известия РАЕН. Дифференциальные уравнения. – 2008. – № 13. – С. 95–101.
6. Пасиков, В. Л. Задачи сближения-уклонения для линейных интегродифференциальных систем Вольтерра с управляющими воздействиями под знаком интеграла / В. Л. Пасиков // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2011. – № 2. – С. 58–70.
7. Пасиков, В. Л. Игровые задачи наведения для линейных интегродифференциальных систем Вольтерра с управляющими воздействиями под знаком интеграла / В. Л. Пасиков // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2012. – № 2.
8. Пасиков, В. Л. Экстремальное прицеливание в игре линейных систем Вольтерра / В. Л. Пасиков // Дифференциальные уравнения. – 1986. – Т. XXII, № 5. – С. 907–909.
9. Пасиков, В. Л. Игровые задачи для систем интегральных уравнений Вольтерра / В. Л. Пасиков. – Рязань: Рязанский ордена «Знак почета» госпединститут, 1983. – 42 с.

References

1. Krasovskiy N. N. *Igrovye zadachi o vstreche dvizheniy* [Game problem on motions meeting]. Moscow: Nauka, 1970, 420 p.
2. Subbotin A. I., Chentsov A. G. *Optimizatsiya garantii v zadachakh upravleniya* [Assurance optimization in control problems]. Moscow: Nauka, 1981, 288 p.

3. Gorokhovik V. V., Kirillova F. M. *Upravlyaemye sistemy: sb. tr. – Vyp. 10* [System control: collected papers – Issue 10]. Novosibirsk, 1971, pp. 3–9.
4. Gnedenko B. V. *Kurs teorii veroyatnostey* [Probability theory course]. Moscow: Nauka, 2005, 448 p.
5. Pasikov V. L. *Izvestiya RAEN. Differentsial'nye uravneniya* [Bulletin of the Russian Academy of Natural Sciences. Differential equations]. 2008, no. 13, pp. 95–101.
6. Pasikov V. L. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzh-skiy region. Fiziko-matematicheskie nauki* [University proceedings. Volga region. Physics and mathematics sciences]. 2011, no. 2, pp. 58–70.
7. Pasikov V. L. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzh-skiy region. Fiziko-matematicheskie nauki* [University proceedings. Volga region. Physics and mathematics sciences]. 2012, no. 2.
8. Pasikov V. L. *Differentsial'nye uravneniya* [Differential equations]. 1986, V. XXII, no. 5, pp. 907–909.
9. Pasikov V. L. *Igrovye zadachi dlya sistem integral'nykh uravneniy Vol'terra* [Game problems for Volterra integral equations system]. Ryazan: Ryazanskiy ordena «Znak pocheta» gospedinstitut, 1983, 42 p.

Пасиков Владимир Леонидович

кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра естественно-математических дисциплин, Орский филиал Оренбургского государственного института менеджмента (Оренбургская область, г. Орск, Орское шоссе, 4)

E-mail: pasikov_fmfi@mail.ru

Pasikov Vladimir Leonidovich

Candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, sub-department of natural and mathematical disciplines, Orsk branch of Orenburg State Institute of Management (Orenburg region, Orsk, 4 Orskoe road)

УДК 517.977

Пасиков, В. Л.

К теории линейных динамических неантагонистических игр / В. Л. Пасиков // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2013. – № 2 (26). – С. 75–86.